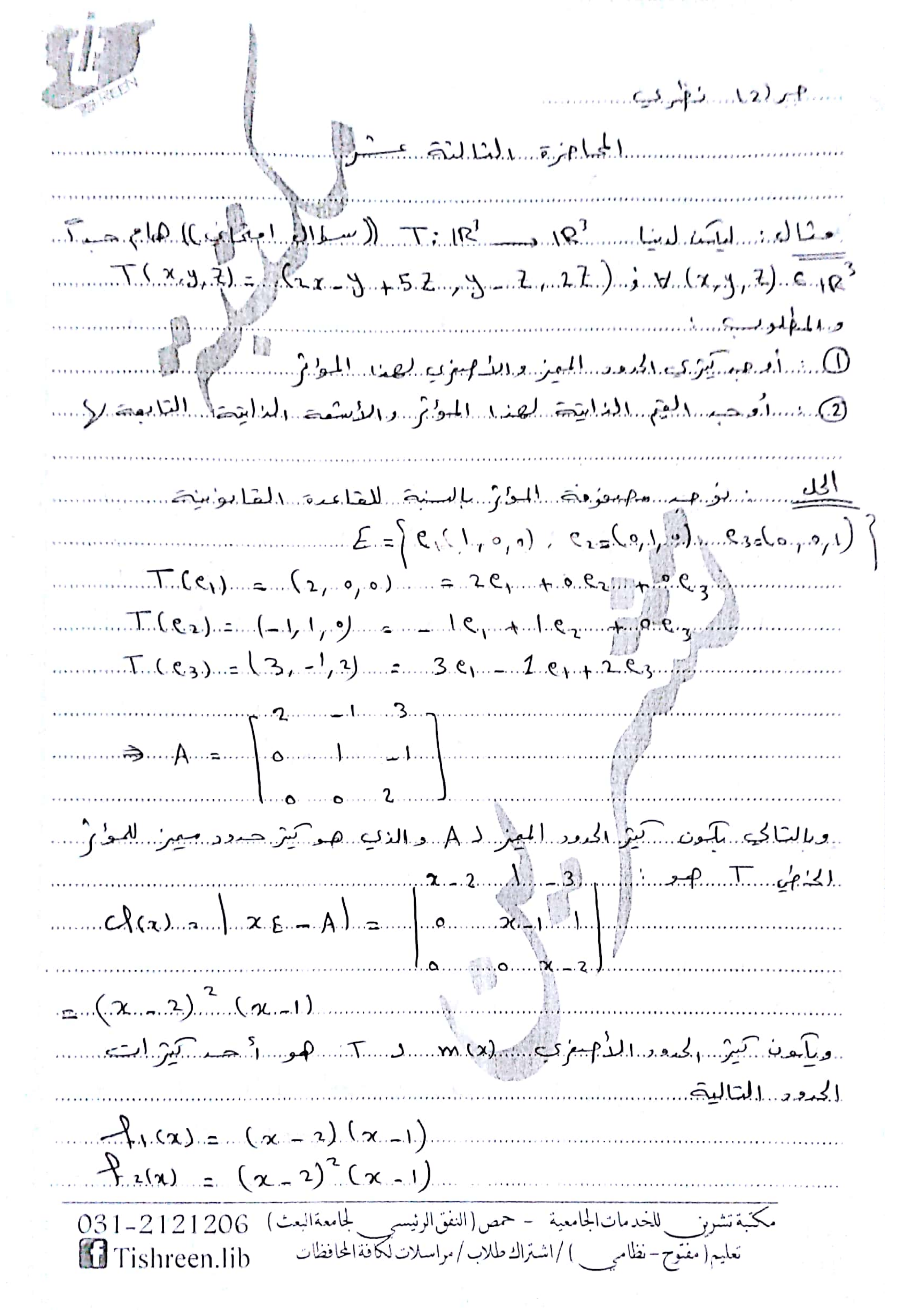


المحاضرة الثالثة عشر

مثال: ليكن لدينا $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ((سؤال امتحاني)) هام جداً

$$T(x,y,z) = (2x - y + 5z \,,\, y - z \,,\, 2z) \;;\; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

والمطلوب:

① أوجد كثير الحدود المميز والأصغري لهذا المؤثر

② أوجد القيم الذاتية لهذا المؤثر والأشعة الذاتية التابعة لا

الحل: نوجد مصفوفة المؤثر بالنسبة للقاعدة القانونية

$$E = \{ e_1(1,0,0) \,,\, e_2 = (0,1,0) \,,\, e_3 = (0,0,1) \}$$

$$T(e_1) = (2,0,0) = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$T(e_2) = (-1,1,0) = -1e_1 + 1e_2 + 0e_3$$

$$T(e_3) = (3,-1,2) = 3e_1 - 1e_1 + 2e_3$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون كثير الحدود المميز لـ A والذي هو كثير حدود مميز للمؤثر الخطي T هو:

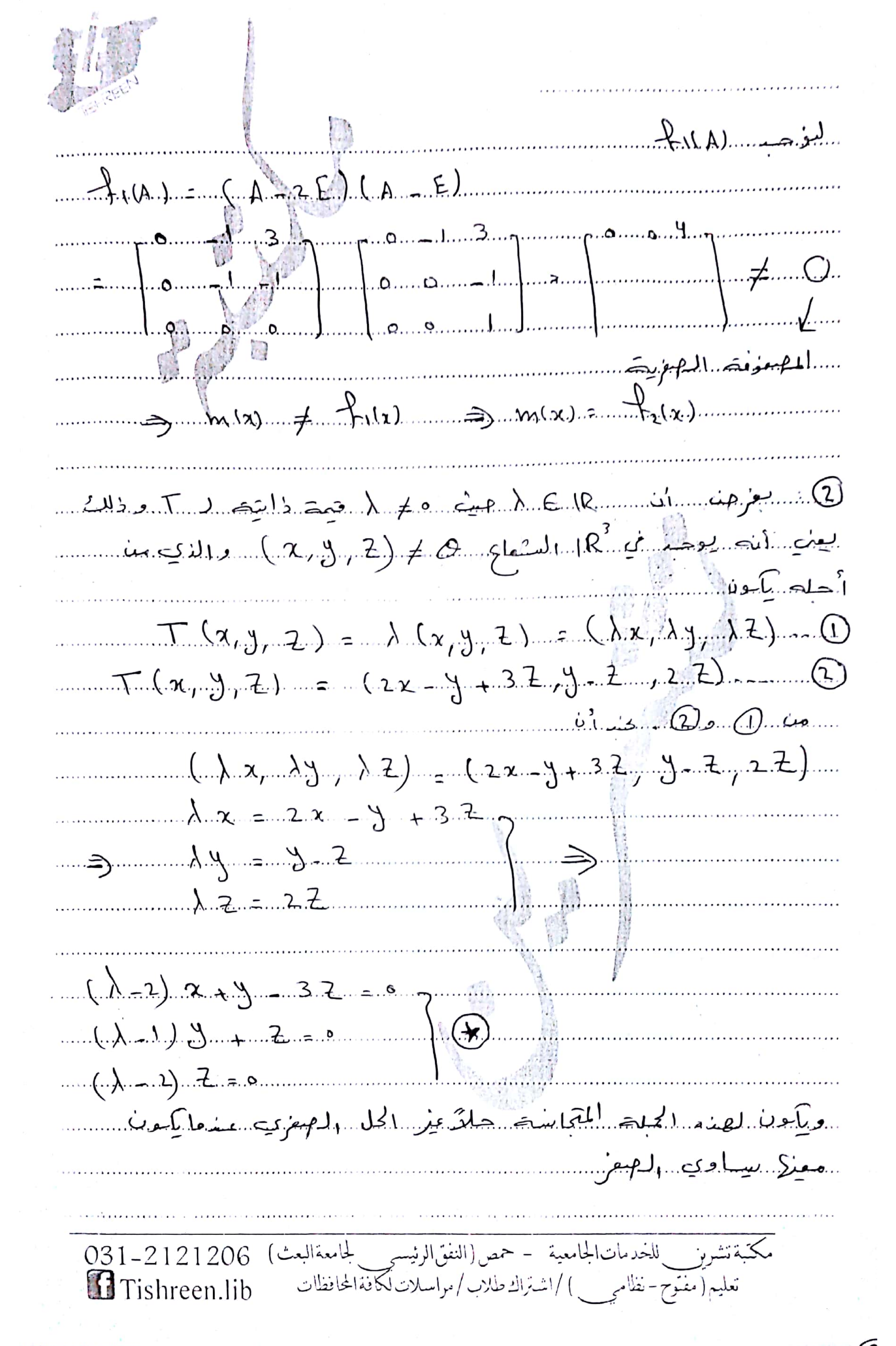
$$cl(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -3 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)^2 (x-1)$$

ويكون كثير الحدود الأصغري $m(x)$ لـ T هو أحد كثيرات الحدود التالية

$$f_1(x) = (x-2)(x-1)$$

$$f_2(x) = (x-2)^2 (x-1)$$



لنوجد $f_1(A)$

$$f_1(A) = (A-2E)(A-E)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \neq O$$

O ← المصفوفة الصفرية

$$\Rightarrow m(x) \neq f_1(x) \quad \Rightarrow m(x) = f_2(x)$$

② نفرض أن $\lambda \in \mathbb{R}$ حيث $\lambda \neq 0$ قيمة ذاتية لـ T وذلك يعني أنه يوجد في الشعاع $\mathbb{R}^3$ $(x,y,z) \neq O$ والذي من أجله يكون

$$T(x,y,z) = \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \text{①}$$

$$T(x,y,z) = (2x - y + 3z,\ y - z,\ 2z) \quad \text{②}$$

من ① و ② نجد أن

$$(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2x - y + 3z,\ y - z,\ 2z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda x = 2x - y + 3z \\ \lambda y = y - z \\ \lambda z = 2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x + y - 3z = 0 \\ (\lambda - 1)y + z = 0 \\ (\lambda - 2)z = 0 \end{cases} \quad \circledast$$

ويكون لهذه الجملة المتجانسة حلاً غير الحل الصفري عندما يكون مميزها يساوي الصفر

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 ,\ \lambda_2 = 2 ,\ \lambda_3 = 1$$

نوجد الآن الأشعة الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = 2$

نعوض $\lambda = 2$ في الجملة (*) فنجد

$$\left.\begin{array}{l} y - 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = y = 0 \ ; \ x = 1$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (1, 0, 0) \Rightarrow V_2 \{ t(1,0,0) \ ; \ t \in IR \}$$

الأشعة الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ بنفس الطريقة السابقة

نعوض λ في (*) فنحصل على

$$\left.\begin{array}{l} -x + y - 3z = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = 1$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 0) \Rightarrow V_3 \{ k(1,1,0) \ ; \ k \in IR \}$$

ملاحظة: إن القيم الذاتية لهذا المؤثر الخطي هي أصفار كثير الحدود المميز $C(x)$ حيث أن القيم التي تعدم كثير الحدود هي القيم الذاتية

((انتهت المحاضرة الثالثة عشر))

«مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح»

إعداد: فاطمة الشميني